Chapitre 10

L'OUTIL DEVELOPPEMENT LIMITE

10.1 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 1 *Soit a un nombre réel. Soit f une fonction réelle définie indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. Soit n un entier naturel non nul. Alors, pour $a+h \in I$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + h^n\varepsilon(h)\ ,$$

où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Le "reste" $h^n\varepsilon(h)$ s'appelle reste de Young, et la formule du théorème est la *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en a.*
Le reste de Young se note également $o(h^n)$; on a l'égalité $g(h) = o(h^n)$ si $\lim_{h\to 0} g(h)/h^n = 0$.
A l'ordre 1, la formule s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

C'est simplement écrire que f a pour dérivée $f'(a)$ en a. La formule de Taylor avec reste de Young en a donne des renseignements sur le comportement de la fonction quand la variable tend vers a, comme la formule pour la dérivée en a qu'elle généralise.
Exemples. En $a = 0$, la formule de Taylor avec reste de Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Pour $f(x) = e^x$ (qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), on a $(e^x)^{(k)}(0) = 1$ pour tout k, et la formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .}$$

Pour $f(x) = \sin x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont $0, 1, 0, -1$ et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n$ en 0 s'écrit

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).}$$

Pour $f(x) = \cos x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont $1, 0, -1, 0$ et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n+1$ en 0 s'écrit

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\ .}$$

Soit α un nombre réel. Alors $f(x) = (1+x)^\alpha$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\ .}$$

Par exemple

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\ .}$$

ou bien pour $\alpha = -1$ et en changeant x en $-x$.

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\ \ .}$$

10.2 Développements limités

Définition : Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a. On dit que f *admet un développement limité à l'ordre n en a* s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ s'appelle la *partie régulière* du développement limité. Un développement limité de f à l'ordre n nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui “se comporte comme f à l'ordre n” au voisinage de a, dans le sens que la différence entre $f(a+h)$ et ce polynôme en h est négligeable devant h^n quand $h \to 0$.

Si la fonction f est indéfiniment dérivable sur un intervalle contenant a, la formule de Taylor-Young nous donne un développement limité à n'importe quel ordre n, avec $a_0 = f(a)$ et $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ pour $1 \le k \le n$.

Réciproquement, on peut se demander si un développement limité est toujours donné par une formule de Taylor-Young, c.-à-d. si une fonction qui a un développement limité à l'ordre n en a a une dérivée n-ème en a. C'est vrai à l'ordre 1, et dans un développement limité

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

on a toujours $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$. Mais ceci ne va plus à l'ordre 2. Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x).$$

Elle a un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$. Sa dérivée est

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x) = 1 + x(2 - \cos(1/x)) + 3x^2 \sin(1/x),$$

et f n'a pas de dérivée seconde en 0 car

$$\frac{f'(x) - 1}{x} = 2 - \cos(1/x) + 3x \sin(1/x)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Introduisons une notation qui sera utile pour la suite. Si P est un polynôme, on désignera par $T_k(P)$ (le tronqué de P au degré k) le polynôme obtenu à partir de P en ne conservant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à k. Par exemple $T_4(x - x^3/3 + 2x^5) = x - x^3/3$.

Proposition 1 *1) Le développement limité, s'il existe, est unique.*

2) Si f a un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière P, et si $k \leq n$, alors f a aussi un développement limité à l'ordre k, dont la partie régulière est le tronqué $T_k(P)$.

Démonstration : 1) Si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + h^n \varphi(h),$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \cdots + (a_n - b_n)h^n}{h^n} = 0,$$

ce qui entraîne $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ et donc aussi $\varepsilon(h) = \varphi(h)$.

2) Si $f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$, alors

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_k h^k + [a_{k+1} h^{k+1} + \cdots + a_n h^n + o(h^n))],$$

et le terme entre crochet est bien $o(h^k)$ quand h tend vers 0.
Voici maintenant une remarque dont il est utile de se souvenir pendant les calculs

Proposition 2 *La partie régulière du développement limité d'une fonction paire (resp. impaire) en 0 est un polynôme pair (resp. impair), c.-à-d. qu'il ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.*

Démonstration : Si f est paire et si, en 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

alors en changeant x en $-x$ on obtient

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots - a_{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

d'où par unicité du développement limité,

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

Par exemple, la partie régulière du développement limité de $\sin x$ en 0 ne contient que des puissances impaires.

10.3 Opérations sur les développements limités

Dans tout ce paragraphe, nous ne considérerons que des développements limités en 0.

Proposition 3 (Somme et produit) *Si f et g ont des développements limités à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

alors $f+g$ et fg aussi

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n) \\ (fg)(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i})x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité de la somme est la somme des parties régulières de chacun des développements limités, et celle du produit est le tronqué au degré n du produit des parties régulières (tous les développements limités étant au même ordre n). Nous nous contenterons d'un exemple

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))^2 = 1-x^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{24}\right)x^4+o(x^5)\\ &= 1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^5)\end{aligned}$$

Quand on fait le produit des parties régulières (ou qu'on élève au carré, comme ici), il n'est bien entendu pas besoin de calculer les termes dont le degré dépasse l'ordre du développement limité. Il est bon aussi de se souvenir d'éventuelles propriétés de parité (par exemple dans le cas d'un carré). Ici, on aurait aussi pu utiliser $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$.

Il se peut que l'on gagne des ordres dans le développement limité du produit. Par exemple, pour avoir le développement limité de $\sin^3 x$ à l'ordre 6, on peut faire

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3 = x^3\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)^3\\ &= x^3(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) = x^3-\frac{x^5}{2}+o(x^6)\end{aligned}$$

Il est quelquefois utile, comme ici, de mettre des puissances de x en facteur, en se souvenant que $o(x^{d+e}) = x^d o(x^e)$ (toujours quand $x \to 0$, bien sûr).

Comme conséquence de ce que l'on a vu pour les sommes, citons le fait que la partie régulière du développement limité de la partie paire d'une fonction f (définie comme $(f(x)+f(-x))/2$) est la partie paire de la partie régulière du développement limité de $f(x)$. Idem pour la partie impaire. En partant de e^x, ceci nous donne

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{ch}\, x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\ \mathrm{sh}\, x &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})\end{aligned}}$$

Proposition 4 (Substitution) *Si f et g (avec $g(0)=0$) ont des développements limités à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n) \qquad g(x) = b_1x+\cdots+b_nx^n+o(x^n),$$

alors $f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans

$$a_0+a_1(b_1x+\cdots+b_nx^n)+\cdots+a_n(b_1x+\cdots+b_nx^n)^n.$$

Autrement dit, si $A(x)$ est la partie régulière du développement limité de $f(x)$ et $B(x)$ ($B(0)=0$) celle de $g(x)$, alors la partie régulière du développement limité de $f(g(x))$ est le tronqué $T_n(A(B(x)))$.

Il faut bien prendre garde à la condition $g(0)=0$ quand on substitue. Par exemple, pour calculer le développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3, si on écrit

$$e^{\cos x} = 1+(1-x^2/2)+\frac{(1-x^2/2)^2}{2!}+\frac{(1-x^2/2)^3}{3!}+o(x^3) = \frac{8}{3}-\frac{5}{4}x^2+o(x^3),$$

ON A TOUT FAUX! En effet, $\cos 0 = 1 \neq 0$. Le calcul correct est

$$e^{\cos x} = e\left(e^{\cos x - 1}\right) = e(1 + (-x^2/2) + o(x^3)) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3).$$

On constate ici que l'on gagne même en précision : on a déjà le développement limité à l'ordre 3 en substituant $\cos x - 1$ dans le développement limité à l'ordre 1 de e^x. Ceci vient du fait que $\cos x - 1 = x^2/2 + o(x^3)$ quand $x \to 0$. Dans le même ordre d'idée, la partie régulière du développement limité de $f(x^2)$ à l'ordre $2n+1$ en 0 s'obtient en substituant x^2 à x dans la partie régulière du développement limité de $f(x)$ à l'ordre n.
Pour effectuer un quotient, on utilise la formule suivante, au besoin en ayant d'abord factorisé par une puissance de x,

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\ .}$$

et on effectue ensuite un produit de développements limités.
Un exemple : le calcul du développement limité à l'origine de $\tan x$ à l'ordre 6. On se souvient que tan est impaire (il y aura des termes en x, x^3 et x^5 uniquement.) On a $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^6)$ et $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^5)$. On en déduit que

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4!}x^4 + o(x^5)$$

et on obtient alors en multipliant par $\sin x$,

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)\ ,}$$

formule qu'il n'est pas mauvais de connaître par coeur.

Proposition 5 (Intégration) *Si f a un développement limité à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 ($F' = f$), alors F a un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, qui est

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité à l'ordre $n+1$ d'une primitive est une primitive de la partie régulière du développement limité à l'ordre n.

Ainsi, de

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

on obtient le développement limité en 0

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\ ,}$$

et par intégration

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})\ .}$$

De
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$
on tire
$$\boxed{\text{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).}$$
Exercice : Calculer le développement limité à l'ordre $2n$ de Arctan en 0.

10.4 Utilisation des développements limités

Les développements limités servent à calculer des limites, ils servent aussi à l'étude des courbes. Pour les calculs, on se ramène toujours à écrire des développements limités en 0.

Quand on est au voisinage de a, on fait le changement de variables $x = a + h$ et on écrit des développements limités en 0 pour la variable h. Par exemple, pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ à l'ordre 2, on écrit
$$\begin{aligned} \tan(\frac{\pi}{4} + h) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan h}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\,\tan h} = \frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \frac{1+h+o(h^2)}{1-h+o(h^2)} \\ &= (1+h+o(h^2))(1+h+h^2+o(h^2)) = 1 + 2h + 2h^2 + o(h^2), \end{aligned}$$
où le o est pour $h \to 0$. On peut aussi écrire
$$\tan x = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + o\left((x - \frac{\pi}{4})^2\right),$$
où cette fois-ci le o est pour $x \to \pi/4$.

Au voisinage de l'infini, on utilise le changement de variable $x = 1/t$, et on écrit des développements limités en 0 pour la variable t. Soit par exemple à étudier la branche infinie pour $x \to -\infty$ de la courbe d'équation
$$y = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}.$$
Pour $x < -1$, on a (attention aux signes !)
$$y = x\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$
On fait $t = 1/x$, et on écrit le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(t) = \sqrt[3]{1+t^2+t^3} + \sqrt{1-t-t^2}$. On a
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+t^2+t^3} &= 1 + \frac{1}{3}(t^2+t^3) + o(t^2) = 1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \\ \sqrt{1-t-t^2} &= 1 + \frac{1}{2}(-t-t^2) - \frac{1}{8}(-t-t^2)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{5t^2}{8} + o(t^2) \\ f(t) &= 2 - \frac{t}{2} - \frac{7t^2}{24} + o(t^2) \end{aligned}$$
et donc, en $-\infty$,
$$y = x\left(2 - \frac{1}{2x} - \frac{7}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x - \frac{1}{2} - \frac{7}{24x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = 2x - 1/2$ est asymptote, et la courbe est au dessus de l'asymptote car $-7/(24x) + o(1/x) > 0$ quand x est "proche de $-\infty$".

Quand on fait les calculs à la main, il y a des pièges classiques dans lesquels il vaut mieux ne pas tomber. On a signalé plus haut une erreur à éviter dans le cas de substitutions. Un point important à garder à l'esprit est : *à quel ordre sont les développements limités* ? Il faut *toujours écrire les restes*, pour garder l'ordre en mémoire. Par exemple une écriture du genre

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

EST ABSOLUMENT A PROSCRIRE. Elle conduit inévitablement à des calculs comme

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}$$

qui font croire que l'on a comme ceci le développement limité de $\sin^2 x$ à l'ordre 6 (que vaut-il, pour de vrai?).

10.5 Développements limités à connaitre

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x) \\
\text{ch } x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\text{sh } x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\text{th } x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + x^3\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + x^3\varepsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
\text{Arctan } x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$